**Matemātiskās modelēšanas un diferenciālvienādojumu teorijas sintēze[[1]](#footnote-1)\***

**Šarifs Guseinovs1,2,a, Jekaterina Aleksejeva2,b, Jevgenijs Kaupužs1,2,c**

*1Dabas un inženierzinātņu fakultāte, Liepājas Universitāte*

*2Dabaszinātņu un inovatīvo tehnoloģiju institūts, Liepājas Universitāte*

*a*[*sh.e.guseinov@inbox.lv*](mailto:sh.e.guseinov@inbox.lv)*, b*[*jekaterina.v.aleksejeva@gmail.com*](mailto:jekaterina.v.aleksejeva@gmail.com)*, c*[*kaupuzs@latnet.lv*](mailto:kaupuzs@latnet.lv)

Diferenciālvienādojumu teorija ir vislielākā mūsdienu matemātikas sadaļa. Lai raksturotu tās vietu mūsdienu matemātikas zinātnē, vispirms jāraksturo galvenās diferenciālvienādojumu teorijas īpatnības. To veido divas plašas matemātikas nozares: parasto diferenciālvienādojumu teorijas un parciālo diferenciālvienādojumu teorijas. Lai izveidotu matemātisko modeli diferenciālvienādojumu formā, kā likums, jāzina tikai lokālās sakarības un nav nepieciešama informācija par visu fizikālo parādību kopumā. Matemātiskais modelis paver iespēju pētīt parādību kopumā, paredzēt tās attīstību, veikt kvantitatīvus novērtējumus tajā notiekošajām izmaiņām laika gaitā. Turklāt vairuma tehnisko ierīču pilnību galvenokārt nosaka pārveidošanas un pārvietošanas procesu efektivitāte ierobežotam skaitam substanču, tādu kā masa, enerģija, impulss, elektriskais lādiņš un informācija. Šie procesi pakļaujas fundamentāliem dabas likumiem, kurus pēta mehānika, fizika, ķīmija, bioloģija, medicīna un citas dabas zinātnes.

Ne vienmēr šiem likumiem ir bijusi noteicošā loma tehnikas attīstībā. Ir daudz tehnisku ierīču izgudrošanas piemēru, kuri, gluži pretēji, ir pamudinājuši uz fundamentālu zinātnisku nostādņu atklāšanu vai precizēšanu. Šādas situācijas rodas arī mūsdienās. Tomēr galvenā līnija principiāli jaunu tehnisko ierīču radīšanā un jau eksistējošo uzlabošanā – tā ir to iespēju realizēšana, kuras paveras, izmantojot fundamentālo pētījumu rezultātus diferenciālvienādojumu teorijā. Ar to arī ir izskaidrojams mūsdienu akcents uz fundamentālo zinātņu apguvi inženieru izglītošanā. Izšķiroša loma šādu pētījumu rezultātu realizēšanā ir matemātiskajai modelēšanai. Nav iespējams iedomāties mūsdienu zinātni bez plašas diferenciālvienādojumu teorijas un matemātiskās modelēšanas izmantošanas.

Šīs metodoloģijas būtība ir sākotnējā objekta aizstāšana ar tā “attēlu” – matemātisko modeli diferenciālvienādojumu veidā – un tālāka modeļa pētīšana ar viegli realizējamu skaitliski loģisku un analītisku algoritmu palīdzību. Šī izziņas “trešā metode”, t. i., konstruēšana un projicēšana, apvieno gan teorijas, gan eksperimenta daudzas priekšrocības. Darbs nevis ar pašu objektu, parādību vai procesu, bet ar tā modeli ļauj nesāpīgi, relatīvi ātri un bez būtiskiem materiāliem un finansiāliem tēriņiem izpētīt tā īpašības un uzvedību jebkurā iedomājamā situācijā. Tā ir teorijas priekšrocība. Tajā pašā laikā skaitliskās modelēšanas un imitācijas eksperimenti ar objektu modeļiem ļauj, balstoties uz moderno skaitlisko metožu un informātikas tehnisko instrumentu varenību, detalizēti un dziļi izpētīt objektus pietiekamā pilnībā, kas nav sasniedzama tīri teorētiskā pieejā. Tā ir eksperimenta priekšrocība. Nav pārsteidzoši, ka matemātiskās modelēšanas metodoloģija ar diferenciālvienādojumu teorijas starpniecību strauji attīstās, aptverot aizvien jaunas sfēras – no tehnisko sistēmu izstrādāšanas un to vadīšanas līdz vissarežģītāko ekonomisko un sociālo procesu analīzei.

Jāuzsver, ka matemātiskā modeļa pareizības pārbaudei ļoti svarīgas ir attiecīgo diferenciālvienādojumu atrisinājuma eksistences teorēmas, jo matemātiskais modelis ne vienmēr ir atbilstošs konkrētajai parādībai, un no reālās fizikālās, ķīmiskās, bioloģiskās u. tml. problēmas atrisinājuma eksistences vēl neizriet atbilstošās matemātiskās problēmas atrisinājuma eksistence.

Kā jau tika atzīmēts, mūsdienās svarīga loma diferenciālvienādojumu teorijas attīstībā ir moderno elektronisko skaitļošanas mašīnu (ESM) izmantošana. Diferenciālvienādojumu pētīšana bieži atvieglo iespēju veikt skaitlisku eksperimentu to vai citu atrisinājuma īpašību noskaidrošanai, kuras pēc tam var tikt teorētiski pamatotas un var kalpot par pamatu tālākiem teorētiskiem pētījumiem. Skaitliskais eksperiments tiek veikts ar fizikālās parādības matemātisko modeli. Turklāt no vieniem modeļa parametriem tiek aprēķināti citi un tiek izdarīti secinājumi par pētāmās fizikālās parādības īpašībām. Skaitliskā eksperimenta mērķis – ar ESM palīdzību izveidot adekvātu un pietiekami precīzu pētāmās fizikālās parādības kvantitatīvu aprakstu, patērējot iespējami īsāku mašīnlaiku. Šāda eksperimenta pamatā ļoti bieži ir parciālo diferenciālvienādojumu sistēmas skaitliska risināšana. No šejienes rodas diferenciālvienādojumu teorijas saikne ar skaitļošanas matemātiku, tai skaitā ar tādām tās svarīgām sadaļām kā galīgo diferenču metodes, galīgo elementu metodes un citas.

Atzīmēsim, ka matemātiskās modelēšanas elementi diskretizētu diferenciālvienādojumu veidā tika izmantoti jau no pašiem precīzo zinātņu pirmsākumiem, un tā nav nejaušība, ka dažām to risināšanas analītiskajām un skaitliskajām metodēm ir tādu zinātnes korifeju vārdi kā I. Ņūtons un L. Eilers, Ž. L. Lagranžs un A. M. Ležandrs, P. S. Laplass un Ž. S. Adamars, A. N. Tihonovs un A. A. Samarskis, bet vārds “algoritms” ir cēlies no viduslaiku arābu zinātnieka Al Horezmī vārda. Vēlākā matemātiskās modelēšanas “dzimšana” galīgu diferenču diferenciālvienādojumu formā ir attiecināma uz XX gadsimta 40. gadu beigām un 50. gadu sākumu vismaz divu iemeslu dēļ. Pirmais no tiem ir kompjūteru parādīšanās. Lai gan tie, pēc mūsdienu mērauklām, bija pieticīgi, tomēr atbrīvoja zinātniekus no milzīga apjoma rutīnas skaitļošanas darba. Otrais iemesls ir bezprecedenta sociālais pasūtījums, kura ietvaros tika pildītas divu superlielvalstu – PSRS un ASV – nacionālās programmas kodolraķešu vairoga izveidei, kuras nevarēja izpildīt ar tradicionālajām metodēm. Matemātiskā modelēšana, diferenciālvienādojumu teorija un skaitļošanas matemātika tika galā ar šiem uzdevumiem: kodolsprādzienus, raķešu un pavadoņu lidojumus vispirms zinātnieki “realizēja” uz papīra, tad ESM dzīlēs, un tikai pēc tam tie tika veikti praksē. Šie panākumi lielā mērā noteica tālākos sasniegumus matemātiskās modelēšanas metodoloģijā, bez kuras izmantošanas attīstītajās valstīs mūsdienās netiek nopietni aplūkots neviens liela mēroga tehnoloģiskais, ekoloģiskais vai ekonomiskais projekts. Teiktais attiecas arī uz dažiem sociāli politiskajiem projektiem.

Tādējādi diferenciālvienādojumu teorija ir cieši saistīta ar pielietojumiem ar matemātiskās modelēšanas starpniecību. Citiem vārdiem sakot, var apgalvot, ka diferenciālvienādojumu teorija ir dzimusi pielietojumos. Šajā sadaļā – diferenciālvienādojumu teorijā – matemātika pirmām kārtām parādās kā neatņemama dabas zinātņu daļa: matemātikā balstās secinājumi un izpratne par kvantitatīvām un kvalitatīvām likumsakarībām dabas zinātnēs.

Šeit ir svarīgi atzīmēt, ka diferenciālvienādojumu teorijā pastāv arī sistēmas strukturālās stabilitātes pētīšanas problēma, jo, izmantojot jebkuru matemātisko modeli, rodas jautājums par to, cik korekta ir iegūto matemātisko rezultātu pielietošana realitātei. Ja rezultāts ir ļoti jūtīgs pret visniecīgākajām izmaiņām modelī, tad vismazākās modeļa izmaiņas novedīs pie pavisam citām īpašībām.

Dažādu dabas zinātņu uzdevumi rada diferenciālvienādojumu teorijai problēmas, no kurām izaug saturā bagātas teorijas. Tomēr mēdz būt arī tā, ka matemātiskie pētījumi, kas radušies pašas matemātikas ietvaros, pēc ilgāka laika atrod pielietojumu reālu problēmu risināšanai to dziļākas izpētes rezultātā. Tāds piemērs ir Trikomi problēma jaukta tipa vienādojumiem, kura vairāk nekā pēc ceturtdaļgadsimta pēc tās atrisināšanas atrada svarīgu pielietojumu modernās gāzu dinamikas uzdevumos, pētot virsskaņas gāzu plūsmas. Lielais vācu universālais matemātiķis Dāvids Hilberts, kurš devis būtisku ieguldījumu daudzu mūsdienu matemātikas nozaru attīstībā, rakstīja: “Matemātika sekoja pa pēdām fizikālajai domāšanai un atgriezeniski tā guva visstiprākos impulsus no fizikas izvirzītajām problēmām.”

Tādējādi diferenciālvienādojumi atrodas it kā matemātikas krustcelēs. No vienas puses, jauni svarīgi sasniegumi topoloģijā, algebrā, funkcionālanalīzē, funkciju teorijā un citās matemātikas nozarēs uzreiz noved pie progresa diferenciālvienādojumu teorijā un līdz ar to atrod pielietojumu. No otras puses, fizikas un tehnikas, bioloģijas un medicīnas, ķīmijas, ekonomikas, ekoloģijas, socioloģijas u. c. problēmas, kas formulētas diferenciālvienādojumu valodā, iedzīvina jaunus virzienus matemātikā, rada nepieciešamību pilnveidot matemātisko aparātu, dod pirmsākumus jaunām matemātiskām teorijām, kam ir savi iekšējās attīstības likumi un savas problēmas.

Slavenais vācu matemātiķis un pedagogs Fēlikss Kristiāns Kleins grāmatā “Lekcijas par matemātikas attīstību XIX gadsimtā” rakstīja: “Mūsdienās matemātika atgādina ieroču ražošanu miera laikā. Paraugi sajūsmina zinātāju. Šo lietu pielietošana paliek otrā plānā.” Neskatoties uz šiem vārdiem, var teikt, ka nedrīkst iestāties par matemātikas “atbruņošanu”. Atcerēsimies, piemēram, ka senie grieķi pētīja koniskos šķēlumus ilgi pirms tam, kad bija atklāts, ka pa tiem kustas planētas. Tiešām, seno grieķu radītā konisko šķēlumu teorija neatrada pielietojumu gandrīz divus tūkstošus gadu, kamēr vācu matemātiķis, astronoms, mehāniķis un optiķis Johanness Keplers to neizmantoja debesu ķermeņu kustības teorijas radīšanai. Balstoties Keplera teorijā, vislielākais angļu matemātiķis, fiziķis, mehāniķis un astronoms Īzaks Ņūtons radīja klasisko mehāniku, kas ir visas fizikas un tehnikas pamatā.

Cits piemērs ir grupu teorija, ko 1771. gadā radīja brīnišķīgais franču matemātiķis, astronoms un mehāniķis Žozefs Luijs Lagranžs, – radusies pašas matemātikas dzīlēs, tā atrada auglīgu pielietojumu tikai XX gadsimta sākumā: vispirms kristalogrāfijā, bet vēlāk arī teorētiskajā fizikā un citās dabas zinātnēs. “Matemātika – tā ir māksla dot dažādām lietām vienu nosaukumu,” tā teicis vislielākais franču matemātiķis, mehāniķis, fiziķis, astronoms un filozofs Žils Anrī Puankarē, izsakot to, ka ar matemātiskā modeļa palīdzību matemātiķi ar vienu metodi pēta mums apkārt esošās pasaules dažādus objektus, procesus un parādības.

Daudzas diferenciālvienādojumu teorijas sadaļas ir tā izaugušas, ka kļuvušas par atsevišķām zinātnēm. Mūsdienās diferenciālvienādojumu teorija ieiet jaunā principiāli svarīgā tās attīstības posmā, “iekārtojoties” tā sauktās informācijas sabiedrības struktūrās. Iespaidīgais progress informācijas pārstrādes, pārsūtīšanas un glabāšanas līdzekļu jomā atbilst dažādu cilvēces darbības sfēru sarežģīšanās un savstarpējas pārklāšanās tendencēm mūsdienu pasaulē. Bez piekļuves informācijas resursiem nevar pat domāt par aizvien augošo un aizvien daudzveidīgāko pasaules un civilizācijas problēmu risināšanu.

Tomēr informācija pati par sevi bieži vien maz ko dod analīzei un prognozēšanai, lēmumu pieņemšanai un to izpildes kontrolei. Ir nepieciešami droši paņēmieni informācijas “izejmateriāla” pārstrādei gatavajā “produktā”. Tieši tur ir nepieciešama teorētiskās un lietišķās matemātikas palīdzība, tai skaitā matemātiskā modelēšana nelineāru diferenciālo un pseidodiferenciālo operatoru formā. Risinot “informācijas sabiedrības” problēmas, būtu naivi paļauties tikai uz kompjūteru un citu informācijas līdzekļu jaudīgumu. Pastāvīga matemātiskās modelēšanas triādes “matemātiskais modelis – algoritms – programma” pilnveidošana un tās ieviešana modernajās informatīvi modelējošajās sistēmās ir matemātiskais imperatīvs (no latīņu vārda *imperatives* ‘pavēles’). Tikai tā izpilde ļauj iegūt mums tik nepieciešamo augsti tehnoloģisko, konkurētspējīgo un daudzveidīgo materiālo un intelektuālo produkciju. Matemātiskajā imperatīvā galvenā uzmanība tiek veltīta tam, lai analizētu esošos diferenciālvienādojumus, kas ir sastādīti ar matemātiskās modelēšanas un skaitļošanas matemātikas metodēm, palīdzot ar skaitļošanas tehnikas līdzekļiem. Ir svarīgi pasvītrot, ka efektīvai matemātiskās modelēšanas priekšrocību izmantošanai nepietiek ar atsevišķu matemātiskā imperatīva posmu, kas saistīts ar matemātiskā modeļa radīšanu vai algoritmu un programmu pakešu izstrādi, atdalīšanu kā arī ar šo posmu izpildīšanas apmācību pa daļām. Moderno superkompjūteru esamība pati par sevi vēl neatrisina problēmu. Ir nepieciešams skaitļošanas tehnikas “intelektuālais kodols” – tās matemātiskais nodrošinājums, kurš, pēc dažiem novērtējumiem, veido ne mazāk kā 80 % no kopējās informācijas tehnoloģiju izstrādes vērtības. Ērtības, ko lietotājiem sniedz moderno kompjūteru programmu nodrošinājums, bieži rada tieksmi vērsties pie esošajām un pastāvīgi uzlabotajām universālajām lietišķo programmu paketēm, tādām kā MathCAD, MathLAB, Maple u. c., kvantitatīvajā matemātiskā modeļa analīzē. Tomēr šeit jāpiezīmē, ka metode, kas der daudzu diferenciālvienādojumu teorijas standarta uzdevumu risināšanai, bieži vien nav vislabākā, risinot ļoti daudzas tiešās un apgrieztās diferenciālvienādojumu teorijas problēmas, īpaši gadījumā ar parciālajiem atvasinājumiem, bet nereti tā vispār nav pielietojama.

Praksē jārisina galvenokārt šie nestandarta – “dzīvībai svarīgie” – uzdevumi, jo gandrīz visi standarta uzdevumi ir vai nu jau atrisināti, vai arī var tikt atrisināti bez īpašas radošas piepūles. Tāpēc, risinot jaunus un sarežģītus uzdevumus, kuriem nav tuvu analogu, formāla universālo pakešu un programmu kompleksu izmantošana var novest pie tādu rezultātu iegūšanas, kurus neizdodas interpretēt, attiecinot uz reālo aplūkojamo objektu. Tādos gadījumos diferenciālvienādojumu analīze jāveic, prasmīgi savienojot kvantitatīvos un kvalitatīvos novērtējumus, analītiskās metodes un kompjūteru izmantošanu, vienmēr atceroties, ka aprēķinu mērķis ir nevis skaitļi, bet gan izpratne, interpretācija un precizēšana. Viss iepriekš teiktais pierāda, ka kompjūteri, atbrīvojot mūs no daudzām rūpēm un pienākumiem, nekādā gadījumā neatbrīvo no divām lietām: pirmkārt, no nepieciešamības pārvaldīt matemātiku un, otrkārt, no nepieciešamības radoši domāt.

Tādējādi, rezumējot iepriekš teikto, var apgalvot, ka lielākā daļa ceļu, kuri saista abstraktās matemātiskās teorijas un to izmantojumu dabaszinātnēs, ved caur diferenciālvienādojumiem. Tas nodrošina diferenciālvienādojumu teorijai visgodājamāko vietu mūsdienu zinātnē. Tādējādi diferenciālvienādojumu teorijā skaidri izpaužas galvenā matemātikas attīstības līnija: no konkrētā un īpašā caur abstrakciju atkal pie konkrētā un īpašā.

2015. gada decembris

Rīga – Liepāja, Latvija

1. **\*** Šis darbs ir izstrādāts ar Valsts pētījumu programmas "Jaunas paaudzes liela apjoma datu apstrādes sistēmas (NexIT)" atbalstu, <http://www.lumii.lv/resource/show/836> [↑](#footnote-ref-1)